

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE DES STRUCTURES SUR FONDATIONS ELASTIQUES

Par

B. TILIOUINE

Professeur, Ecole Nationale Polytechnique -Alger

M. Said GOUAL

Maître Assistant, ENSET (*) de Laghouat

Résumé

Une méthode matricielle permettant l'étude de la stabilité élastique des structures en portiques reposant sur des fondations élastiques est présentée.

Le comportement du sol de fondation est représenté par le modèle continu de Winkler sur la base duquel la matrice de rigidité exacte d'un élément contraint axialement et reposant sur un système de support continu élastique est développé. La stabilité élastique globale de la structure est déterminée par approximations successives et un exemple numérique est traité aux fins d'illustrer la convergence et la rapidité des résultats obtenus.

Mots clés : méthode des raideurs • modèle de Winkler • stabilité élastique • appuis élastiques • approximations successives.

1 INTRODUCTION

De nombreux problèmes rencontrés dans le domaine du génie civil peuvent être modélisés en utilisant la théorie des poutres sur fondations élastiques. Tels sont les cas des rails de chemin de fer, des canalisations ou pipelines reposant sur des appuis continus ou encore de semelles filantes. Toutefois dans le cas de structures en portiques enterrées, d'ossatures reposant sur un sol élastique, ou de pieux de fondation, la présence des efforts normaux de compression parfois importants nécessite une reformulation du problème [1, 2, 3, 4] et il devient nécessaire de procéder à une vérification de la stabilité de telles structures.

Dans ce qui suit, nous nous proposons la stabilité élastique d'ossatures planes, composées d'éléments de sections droites symétriques et reposant sur des supports élastiques continus. Sous l'action d'un système de forces extérieures données. A cet effet il est nécessaire de tenir compte de l'influence de l'effort normal sur la rigidité flexionnelle d'une poutre reposant sur une fondation élastique. Cette interaction de type N-M introduit des complexités dans la formulation du problème du fait que les forces axiales élémentaires dépendent des déplacements nodaux. Les déformations latérales au niveau d'une section d'un élément donné produisent des moments de flexion supplémentaires (en raison de la présence des efforts axiaux) qui à leur tour introduisent des modifications de la matrice des raideurs. Il en résulte que la solution finale ne peut être obtenue que de manière itérative. Il convient de noter également que les efforts normaux peuvent correspondre à des compressions ou des tractions ce qui affecte différemment la stabilité des éléments structuraux.

2 FORMULATION DU PROBLEME

L'analyse de l'équilibre statique d'un élément infinitésimal d'une poutre de rigidité EI, reposant sur une fondation de Winkler de module K en présence d'un effort normal M, conduit aux équations différentielles suivantes :

$$M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1)$$

$$T(x) = N \frac{dy}{dx} - EI \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (2)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N \frac{d^2 y}{dx^2} + Ky = q(x) \quad (3)$$

(*) Ecole Nationale Supérieure de l'Enseignement Technique.

Les signes positifs pour le moment fléchissant M et l'effort tranchant T sont tels que représentés dans la figure 1. En outre :

- $N > 0$ indique un effort de traction.
- $N < 0$ indique un effort compression.

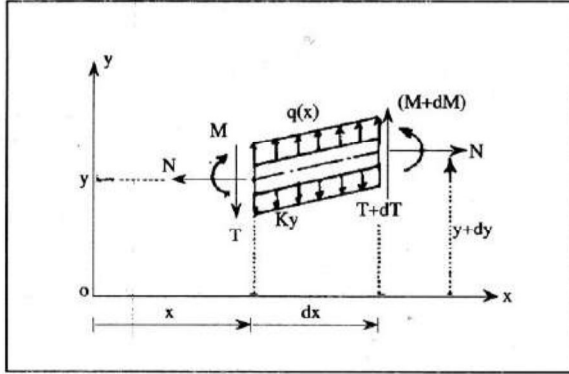


Figure 1

La solution de l'équation différentielle (3) sans second membre est donnée par :

$$y_H = C_1 \cos \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_2 \cos \beta x \cdot \sinh \alpha x + C_3 \sin \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_4 \sin \beta x \cdot \sinh \alpha x \quad (4)$$

où :

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta} \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta}$$

avec :

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

et :

$$\delta = \frac{N}{4EI}$$

La solution donnée par l'équation (4) est limitée aux valeurs courantes $N < 2 \sqrt{K \cdot EI}$.

Cette restriction n'a cependant pas d'importance réelle dans la mesure où elle est satisfaite pour la plupart des cas rencontrés dans la pratique [1, 2].

La solution générale de l'équation (3) est la somme de la solution (4) et d'une solution particulière dépendant de la variation de la densité de charge $q(x)$. Toutefois, seule la solution homogène intervient dans le développement de la matrice des raideurs.

2.1 Matrice de raideurs

La matrice de rigidité d'un élément de poutre reposant sur un système continu de ressorts élastiques compte tenu de l'influence de l'effort normal est donnée comme suit figure 2.

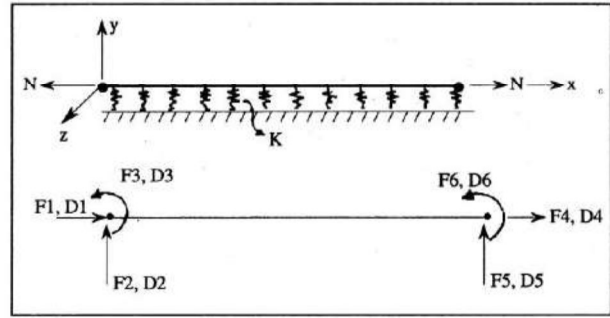


Figure 2

$$[S_L^E] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (5)$$

$$[S_L^E] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & A_1 \frac{12EI}{L^3} & A_2 \frac{6EI}{L^2} & 0 & -A_3 \frac{12EI}{L^3} & A_4 \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_1 \frac{12EI}{L^3} & A_2 \frac{6EI}{L^2} & 0 & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_6 \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 \frac{12EI}{L^3} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & 0 & A_1 \frac{12EI}{L^3} & A_2 \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_6 \frac{2EI}{L} & 0 & -A_2 \frac{6EI}{L^2} & A_5 \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Avec A_i ($i = 1$ à 6) sont les coefficients d'influences du support élastique et de l'effort normal.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha \beta \lambda^2 L^3}{3} \frac{(\beta \sinh \alpha L \cdot \cosh \alpha L + \alpha \cdot \sin \beta L \cdot \cos \beta L)}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \sin^2 \beta L)} \\ A_2 &= \frac{\lambda^2 L^2}{3} \frac{(\alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L + \beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L)}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L)} \\ A_3 &= \frac{\alpha \beta \lambda^2 L^3}{3} \frac{(\alpha \cdot \sin \beta L \cdot \cosh \alpha L + \beta \cdot \cos \beta L \cdot \sinh \alpha L)}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L)} \\ A_4 &= \frac{2\alpha \beta \lambda^2 L^2}{3} \frac{(\sin \beta L \cdot \sinh \alpha L)}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L)} \\ A_5 &= \frac{\alpha \beta L}{2} \frac{\beta \cdot \sinh \alpha L \cdot \cosh \alpha L - \alpha \cdot \sin \beta L \cdot \cos \beta L}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L)} \\ A_6 &= \alpha \cdot \beta L \frac{(\alpha \cdot \sin \beta L \cdot \cosh \alpha L - \beta \cdot \cos \beta L \cdot \sinh \alpha L)}{(\beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha L - \alpha^2 \cdot \sin^2 \beta L)} \end{aligned} \quad (7)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels les forces nodales équivalentes à une charge uniformément répartie sont les suivantes :

$$F_1 = F_4 = 0$$

$$F_2 = F_5 = A_7 \cdot \frac{qL}{2} ; \quad F_3 = -F_6 = A_8 \cdot \frac{qL^2}{12}$$

$$\left[\begin{aligned} A_7 &= \frac{2\alpha}{\lambda^2 \cdot L} \frac{(\cosh\alpha L - \cos\beta L) (\beta^2 \sinh\alpha L - \alpha \beta \sin\beta L)}{(\beta^2 \sinh^2 \alpha - \alpha^2 \sin^2 \beta L)} \\ A_8 &= \frac{6}{\lambda^2 \cdot L^2} \frac{(\beta \cdot \sinh\alpha L - \alpha \cdot \sin\beta L)^2}{(\beta^2 \sinh^2 \alpha - \alpha^2 \sin^2 \beta L)} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Les forces nodales équivalentes à un chargement concentré peuvent être obtenues en utilisant le même principe.

La matrice de rigidité globale est obtenue en assemblant les matrices de rigidité élémentaires après transformation dans le repère global, en utilisant l'opération :

$$[S_G^E] = [R_T]^T \cdot [S_L^E] \cdot [R_T] \quad (9)$$

$[R_T]$ est la matrice de rotation des axes locaux.

2.2 Technique de prise en compte des appuis isolés élastiques

Pour un nœud j élastiquement appuyé, tels que $(S_R)_x$; $(S_R)_y$; $(S_R)_z$; sont les raideurs de l'appui dans les directions x ; y ; z , une simple modification des termes diagonaux de la matrice de rigidité globale $[S_G]$, est à effectuer sans avoir recours à refaire tous les calculs.

Exemple: les termes diagonaux relatifs au nœuds j seront affectés aux termes suivants :

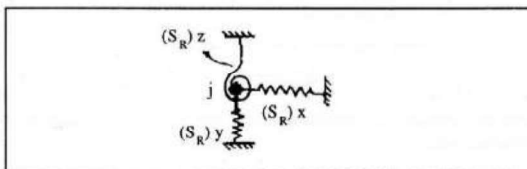


Figure 3

$$\left[\begin{aligned} (S_j)_x &= (S_j)_x + (S_R)_x \\ (S_j)_y &= (S_j)_y + (S_R)_y \\ (S_j)_z &= (S_j)_z + (S_R)_z \end{aligned} \right. \quad (10)$$

2.3 Calcul par approximations successives

Supposons l'état de sollicitation de la structure défini par un vecteur $\{A\}$.

Pour calculer les matrices de rigidité des poutres de la structure, il faut connaître les efforts normaux dans ces poutres, il faut donc procéder par approximations successives.

Dans un premier calcul, on néglige l'influence des efforts normaux sur les matrices de rigidité des poutres, on détermine ainsi l'état de déplacement $\{D\}^1$ de la structure et les efforts normaux $\{N\}^1$, dans les poutres. Ces efforts normaux $\{N\}^1$ permettent de recalculer les matrices de rigidité des poutres, un second calcul donne l'état de déplacement $\{D\}^2$; ainsi que les efforts normaux $\{N\}^2$. Un troisième calcul prenant en compte les efforts normaux $\{N\}^2$ permet de calculer de nouveau les matrices de rigidité des poutres et d'évaluer l'état de déplacement $\{D\}^3$ et les efforts normaux $\{N\}^3$... et ainsi de suite.

Si la suite des états de déplacements $\{D\}^1$ $\{D\}^2$ $\{D\}^3$... tend vers un état de déplacement limite fini, la structure est dans ce cas élastiquement stable, s'il n'en est pas ainsi, la structure s'effondrera brusquement par instabilité élastique.

Les étapes de calcul automatique sont résumées dans l'organigramme suivant :

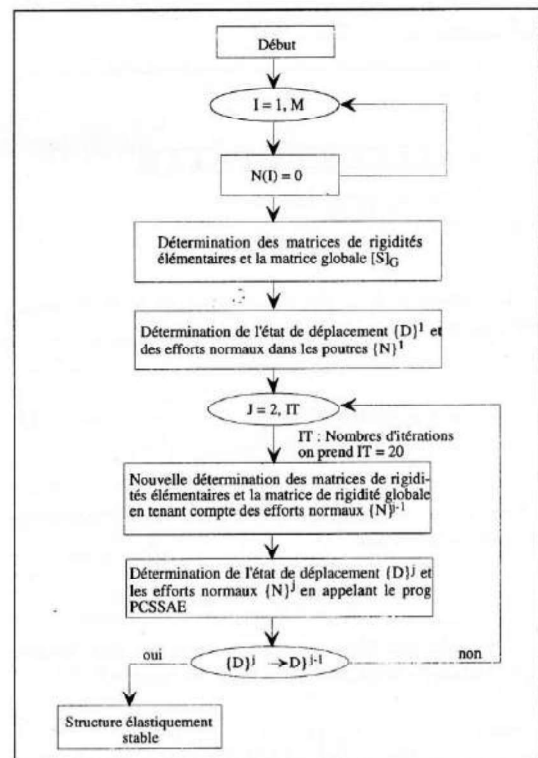


Figure 4

2.4 Stabilité au flambement d'un élément de poutre sur fondation élastique continue

Il est aisé de montrer à partir de l'équation caractéristique (3) que la force critique de flambement est donnée par :

$$N_c = \left[\frac{\pi}{L} \right]^2 \cdot EI \left[n^2 + \frac{K \cdot L^4}{n^2 \pi^4 EI} \right] \quad (11)$$

On en déduit que la valeur minimale de N_c est telle que :

$$n = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}} \quad (12)$$

- Pour le cas d'un sol très mou, on aura pour $n = 1$

$$N_c \approx EI \cdot \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \text{ Force critique d'Euler .}$$

- Pour le cas d'un sol dur, on aura [2] :

$$N_c \approx 2 \cdot \sqrt{K \cdot EI}$$

Nous pouvons illustrer l'effet de l'effort normal de compression dans le cas d'une poutre biarticulée soumise à l'action simultanée d'une charge concentrée P à mi-portée et d'un effort de compression N telle qu'indiquée dans la figure 5 :

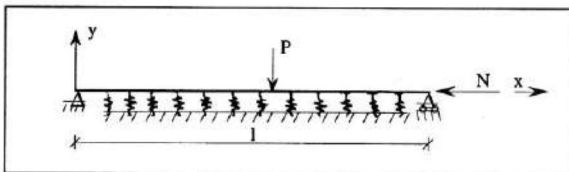


Figure 5

La variation de la flèche en fonction de N est donnée par la relation bien connue [4] :

$$Y(N) = \frac{Y(0)}{1 - \frac{N}{N_c}} \quad (13)$$

- Pour le cas d'une poutre libre ou d'un sol très mou ($\eta = 0$) on a vu que :

$$N_c = N_E \text{ Force critique d'Euler.}$$

- Pour le cas d'une poutre reposant sur une fondation élastique caractérisée par ($\eta \neq 0$) on aura :

$$N_c = \left[\frac{\pi}{L} \right]^2 \cdot EI \left[1 + \frac{\eta}{\pi^4} \right] \quad (14)$$

avec :

$$\eta = \frac{K \cdot L^4}{EI}$$

Ce qui permet le tracé des courbes de la figure 6 prenant en compte l'influence de la rigidité du sol sur le flambement

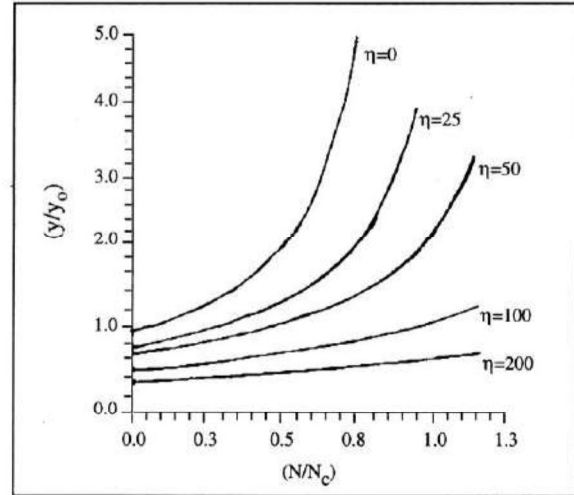


Figure 6

Ces courbes représentent la variation du rapport $Y(N)/Y(0)$ en fonction du rapport N/N_c pour différentes valeurs de η . On observe clairement que l'effet de l'effort N est insignifiant lorsque le paramètre η devient important (cas des sols durs).

3 APPLICATION

Soit à étudier la stabilité élastique du hangar suivant :

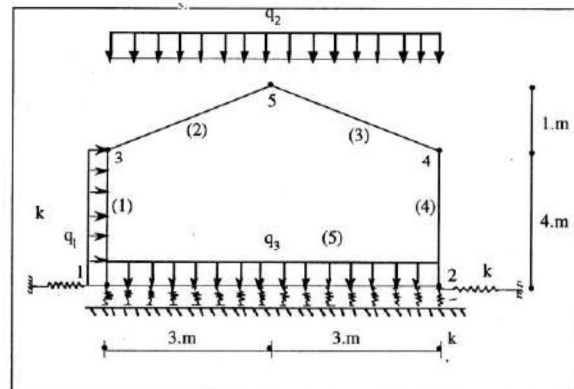


Figure 7

Les principales données d'entrée peuvent être résumées comme suit :

• Les densités de charges :

$$\begin{aligned} q_1 &= 10^4 \text{ N / ml} \\ q_2 &= 3 \cdot 10^4 \text{ N / ml} \\ q_3 &= 4 \cdot 10^4 \text{ N / ml} \end{aligned}$$

- Les caractéristiques géométriques de la structure :
 - Le moment d'inertie des poteaux : $I = 0.00213 \text{ m}^4$.
 - La section des poteaux : $Ax = 0.16 \text{ m}^2$.
 - Le moment d'inertie des traverses : $I = 0.00426 \text{ m}^4$.
 - La section des traverses : $Ax = 0.19 \text{ m}^2$.
 - Le moment d'inertie de la poutre de fondation : $K = 0.00426 \text{ m}^4$.
 - La section de la poutre de fondation : $Ax = 0.19 \text{ m}^2$.
- Les caractéristiques mécaniques du sol de fondation :
 - Le module de fondation $K = 80.E06 \text{ N / m}^2$
 - La raideur horizontale du sol de fondation : $k = 40.E06 \text{ N / m}$.

Les résultats obtenus se présentent comme suit :

- Première itération : $N^{(1)}(i) = 0$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(1)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	0.	1	0.2513E-03	-0.1476E-02	0.4284E-03
2	0.	2	0.2487E-03	-0.2207E-02	-0.1319E-02
3	0.	3	0.2192E-02	-0.1572E-02	-0.1286E-02
4	0.	4	0.3675E-02	-0.2315E-02	0.6858E-03
5	0.	5	0.3059E-02	-0.4279E-02	-0.3583E-04

- Deuxième itération : $N^{(2)}(i) = -A_M^{(1)}(i, 1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(2)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	-80394.2733	1	0.2513E-03	-0.1475E-02	0.4271E-03
2	-42605.7689	2	0.2487E-03	-0.2210E-02	-0.1323E-02
3	-45759.0194	3	0.2207E-02	-0.1571E-02	-0.1290E-02
4	-90365.7267	4	0.3693E-02	-0.2318E-02	0.6855E-03
5	-1780.5656	5	0.3076E-02	-0.4284E-02	-0.3583E-04

- Troisième itération : $N^{(3)}(i) = -A_M^{(2)}(i, 1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(3)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	-80352.1207	1	0.2513E-03	-0.1475E-02	0.4271E-03
2	-42591.7946	2	0.2487E-03	-0.2210E-02	-0.1323E-02
3	-45771.7047	3	0.2207E-02	-0.1571E-02	-0.1290E-02
4	-90407.8793	4	0.3693E-02	-0.2318E-02	0.6855E-03
5	-1781.2065	5	0.3076E-02	-0.4284E-02	-0.3583E-04

En remarque que les vecteurs forces et déplacements convergent bien vers un état stable, ce qui explique la stabilité élastique du portique.

4 CONCLUSION

La stabilité élastique d'ossatures planes bâties sur des fondations élastiques est étudiée. La formulation de type éléments finis est basée sur la solution analytique de l'équation régissant l'équilibre, statique d'un élément de poutre contraint axialement et reposant sur un fondatoir de Winkler. La formulation permet également la prise en compte effective d'appuis élastiques isolés.

La matrice des raideurs exactes d'un élément de portique est obtenue par itérations successives du fait de l'interaction des efforts internes axiaux et flexionnels.

La méthode présente l'avantage de permettre une estimation précise du chargement critique susceptible d'induire l'instabilité élastique globale d'une structure. Seul un nombre limité d'éléments au niveau des points de discontinuité du chargement de la géométrie ou des appuis isolés) est requis. Les résultats montrent, entre autres, que : l'effet de l'effort compression est moins important dans le cas d'un sol dur que dans celui d'un sol meuble.

Pour un état de sollicitation donné, la convergence des vecteurs forces et déplacements vers un état stable peut être très rapide.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. Goual : "Analyse matricielle des structures et de leur stabilité élastique compte-tenu de l'interaction sol-structure". Thèse de Magister, ENP, Alger 1992.
- [2] R. L'Hermite : "Flambage et stabilité". Collection UTI, Eyrolles, Paris, 1974.
- [3] D.Z. Yankelevsky & M. Eisenberg : "Analysis of a beam column on elastic foundation". Computers and structures, Vol.23, n°3, pp.351-356, 1986.
- [4] S. Timoshenko & J. Gere : "Theory of elastic stability". Mc Graw Hill, New York, 1961.